最適所得税の導出について

岩本　康志

経済教室の原稿では, Saez (2001)の議論に沿って, 最適所得税の性質を議論してきたが, その詳細を記述する。以下の記号は，設定がより簡略化された Brewer, Saez and Shephard (2007)に概ねしたがっている。

l を労働供給，n を賃金率（能力）とすると，所得 z は,

$$z = nl$$

で表される。

個人の効用関数を

$$u(c, z, n) = c - \frac{n}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e}$$

と特定化する。c は消費を表す。T を税額とし，税額が所得の一般的な関数となる所得税を考えることにする。個人の予算制約式は

$$c = z - T(z)$$

と表される。予算制約式を効用関数に代入すると,

$$u(z, n) = z - T(z) - \frac{n}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e}$$

となり，z について偏微分すると,

$$1 - T' - \left(\frac{z}{n}\right)^{1/e} = 0$$

となる。これを解いて，所得は，能力と限界税率の関数として,

$$\frac{z}{n} = (1 - T')^{e}$$

で表される。労働供給が所得水準に依存しないので，ここで考えている効用の特定化のもとでは，所得効果が存在しない。$1 - T'$ は，net-of-tax-rate と呼ばれる。最適税制の計算で重要となる所得の net-of-tax-rate に対する弾力性は

$$\frac{1-T'}{z}\frac{\partial z}{\partial(1-T')} = e$$

となる。

また，能力の変化に対する効用の変化は，包絡線定理により,

$$\frac{du}{dn} = \frac{1/e}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e}$$

となる。

社会的厚生関数は,

$$\int \frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma} f(n)dn$$

で表されるものとする。γ が所得分配に対する価値観を表すパラメータとなり $\gamma = 1$ のとき

$$\int \ln u f(n)dn$$

となり,個人の所得の限界効用が効用水準に反比例するときの,功利主義に該当する。γ が大きくなるほど,低所得者の効用により重きを置くことになり,γ が無限大になると最も低い所得水準の個人の効用を高めることが求められるロールズ主義に該当する。

最適所得税の問題設定は,所得税で所与の税収をあげて

$$\int T(z)f(n)dn \geq E$$

社会的厚生関数を最大化することである。この問題は,

$$\max \int \frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma} f(n)dn$$

$$s.t.$$

$$\int T(z)f(z)dn \geq E$$

$$\frac{z}{n} = (1-T'(z))^{e}$$

となる。このような問題を解く場合には,租税関数を消去するのが常套手段である。すなわち,制約式を変更することで,

$$\max \int \frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma} f(n)dn$$

$$s.t.$$

$$\int \left\{ u - z + \frac{n}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e} \right\} f(z)dn \leq -E$$

$$\frac{du}{dn} = \frac{1/e}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e}$$

と書くことができる。u を状態変数として,z を操作することで,目的関数の最大化を図る。

ハミルトン関数を，

$$H=\left\{\frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\lambda\left[u-z+\frac{n}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e}\right]\right\}f(n)+\phi(n)\frac{1/e}{1+1/e}\left(\frac{z}{n}\right)^{1+1/e}$$

と置くと，z に関する最適化の条件は，

$$\frac{\partial H}{\partial z}=\lambda\left[1-\left(\frac{z}{n}\right)^{1/e}\right]f(n)+\phi(n)\frac{1}{en}\left(\frac{z}{n}\right)^{1/e}=0$$

となる。これに，効用最大化の１階の条件を代入すると，

$$\lambda T'f(n)=-\phi(n)\frac{1}{en}(1-T')$$

が得られる。これを変形すると，

$$\frac{T'}{1-T'}=\frac{1}{e}\frac{1-F(n)}{nf(n)}\left[-\frac{\phi(n)/\lambda}{1-F(n)}\right]$$

が得られる。ここで，F は f の分布関数である。２つのラグランジュ乗数については，λは政府支出のための財源を増加させたときの社会的厚生の低下分を表し，公的資金の限界費用となる。ϕは，

$$\frac{d\phi}{dn}=-\frac{\partial H}{\partial u}=-\left[u^{-\gamma}-\lambda\right]f(n)$$

で表されるが，これを高い能力の方に積分すると，

$$-\frac{\phi(n)}{\lambda}=\int_n^{\infty}\left(1-\frac{u^{-\gamma}}{\lambda}\right)f(n)dn$$

となる。個人の所得の限界的増加の社会的評価と公的資金の限界費用の比の平均を

$$G(n)=\frac{1}{1-F(n)}\int_n^{\infty}\frac{u^{-\gamma}}{\lambda}f(n)dn$$

と定義すると，最適所得税が満たすべき条件は，

$$\frac{T'}{1-T'}=\frac{1}{e}\frac{1-F(n)}{nf(n)}(1-G(n))$$

となる。

$\bar{z}$ 以上の所得がパレート分布にしたがうときには，

$$\Pr(z > \bar{z}) = 1 - H(z) = Cz^{-a}$$
$$h(z) = aCz^{-(a+1)}$$
$$\frac{1 - H(z)}{zh(z)} = \frac{1}{a}$$

で表される。$\bar{z}$ 以上の所得の平均は，

$$z_m = \frac{1}{1 - H(\bar{z})} \int_{\bar{z}}^{\infty} zh(z) dz = \frac{1}{1 - H(\bar{z})} \int_{\bar{z}}^{\infty} aCz^{-a} dz$$
$$= \frac{1}{1 - H(\bar{z})} \left[-\frac{aCz^{-a+1}}{a-1} \right]_{\bar{z}}^{\infty} = \frac{1}{c\bar{z}^{-a}} \frac{ac\bar{z}^{-a+1}}{a-1} = \frac{a\bar{z}}{a-1}$$

となる。

所得が $\bar{z}$ 以上の最高所得階層へ一律に τ の限界税率を適用する場合，この階層から得られる税収は

$$\tau(z - \bar{z})N$$

で表される。ここでの，z は平均所得を表す。最高所得階層の所得がパレート分布にしたがうと，

$$\bar{z} = (1 - \tau^*)^e$$

$$z = \frac{a}{a-1}(1 - \tau)^e$$

となるので，$\tau = \tau^*$ で

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a}{a-1}$$

となり，パレート分布の性質を満たす税収は

$$\tau \left[\frac{a}{a-1}(1 - \tau)^e - (1 - \tau^*)^e \right] N$$

で表される。

原稿の図は，a が２，e が低弾性値が 0.25，高弾性値が 0.5 の想定で書かれている。

References

Brewer, Mike, Emmanuel Saez and Andrew Shephard (2007), “Optimal Household Labor Income Tax and Transfer Programs: An Application to the UK,” mimeo.

Saez, Emmanuel (2001), "Using Elasticities to Derive Optimal Income Tax Rates," *Review of Economic Studies*, Vol. 68, No. 1, January, pp. 205-229.